Vid beräkning av optimala aktieportföljer används matriser en hel del, därför beskrivs de viktigaste operationerna som görs på matriserna nedan:

Multiplikation av matriser:

Om A och B är matriser skrivs då multiplikation av dessa som AB. Viktigt att notera att operationen i större delen av fallen ej är kommutativ, d.v.s. AB != BA. För att matrismultiplikationen ska vara definierad så om A är en m*n matris så måste B vara en n*k matris. Den resulterande matrisen kommer att vara av storlek m*k. Följande samband gäller mellan varje element i den nya matris som bildas och elementen i matriserna A och B vid multiplikation av dessa: $(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rj}$.

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1*1+2*5 & 1*2+2*6 & 1*3+2*7 & 1*4+2*8 \\ 3*1+4*5 & 3*2+4*6 & 3*3+4*7 & 3*4+4*8 \\ 5*1+6*5 & 5*2+6*6 & 5*3+6*7 & 5*4+6*8 \end{pmatrix}$$

Transponat:

Om A är en matris betecknas A-transponat som A^T och operationen innebär att det som är rader i A blir kolumner och det som var kolumner blir rader. Följande samband gäller mellan A och A-transponat: $A_{ij}^T = A_{ji}$

Exempel:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Identitetsmatrisen:

Identitetsmatrisen $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ har den egenskapen att om vi har en godtycklig matris A gäller att $AI = IA = A$

Invers matris:

Den inversa matrisen av A betecknas A^{-1} och är definierad på så sätt att $AA^{-1} = I$

Norm:

Om A är en matris så skrivs normen av den som $\|A\|$ och den operationen är definierad som

$\|A\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ om vi för enkelhetens skull väljer at sekventiellt numrera elementen i matrisen och n är antalet element som finns i den. Operationen innebär att vi tar roten ur summan av kvadraten av alla element i matrisen.

Exempel:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}$$

Några viktiga variabler man behöver ha koll på innan vi kan börja beräkningarna:

S_{it}, $t=0,\ldots,T$ är aktiekursen för aktie ifrån dag 0 tills dag T vilket vanligen sätts till den nuvarande dagen.

$r_{it} = \ln(S_{it} / S_{it-1}), t=1,\ldots,T$ är avkastningen för aktien under samma tidsperiod som ovan, med skillnaden att vi börjar på dag 1 eftersom vi behöver ha värdet från dagen innan för att kunna beräkna avkastningen. Avkastningen beräknas på en logaritmisk skala.

$\mu_i = \frac{1}{T\tau}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$ är aktiens väntevärde, vilket i detta fall motsvarar den logaritmiska avkastningen som aktien historiskt sett har haft per år. Värdet fås fram igenom att vi summerar avkastningarna för hela tidsperioden, sedan dividerar vi det på antalet dagar varefter vi avslutar med att för att få det på årsbasis istället för dagsbasis tar och dividerar med τ där $\tau = 1/250$, anledningen till detta värde är att det bara är de börsdagar som finns under året som är intressanta eftersom vi för övriga dagar inte har några värden. Och på ett år finns det ca 250 börsdagar.

Vi inför också att $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}$

Utifrån en aktieportfölj vill man veta hur man ska investera i de olika aktierna först för att minimera risken, det vill säga man vill ha en aktieportfölj vars värde ska vara så stabilt som möjligt. Sedan vill man också veta hur man ska investera för att få största möjliga tillväxt i sin aktieportfölj. Oberoende av vilken av sakerna vi vill göra så kan vi säga att summan av de andelar vi har investerat i de olika aktierna måste bli 1 och därmed måste för alla ekvationer vi löser sambandet $V^T w = 1$ gälla, där $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix}$, matrisen V innehåller i vårt fall alltid lika många rader som vi har aktier. Vidare så betyder V^T V-transponat vilket innebär att det som är kolumner i V blir rader i V^T. Ekvationen bli då som följer

$V^T w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix} = \left(1 * w_1 + \ldots + 1 * w_j\right)$ vilket innebär att vi helt enkelt summerar alla elementen i matrisen w och får ut svaret i en 1x1 matris.

Nu kan vi gå vidare med att leta reda på våra optimala aktieportföljer, först vill vi då hitta hur vi gör för att minimera risken i vår aktieportfölj igenom att göra dess totala varians så liten som möjligt, det vi vill göra är alltså att hitta det minsta värdet som ekvationen $w^T C w$ antar då

$V^T w = 1$ där $C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1j} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \sigma_{i1} & \cdots & \sigma_{ij} & \cdots & \sigma_{iN} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{Nj} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$ där σ_{ij} är kovariansen mellan aktie i och j samt N är antalet aktier i aktieportföljen. C brukar oftast kallas för kovariansmatrisen

Optimallösningen till denna ekvation är given som $w_R = \dfrac{C^{-1}V}{\| C^{-1}V \|}$. Om vi börjar med att analysera $C^{-1}V$ så är det som händer här att vi tar och multiplicerar inversen av C med vår kolumnmatris V, för att illustrera detta tar vi och sätter $C^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1j} & \cdots & \omega_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \omega_{i1} & \cdots & \omega_{ij} & \cdots & \omega_{iN} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N1} & \cdots & \omega_{Nj} & \cdots & \omega_{NN} \end{pmatrix}$ och vi får då

$C^{-1}V = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1j} & \cdots & \omega_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \omega_{i1} & \cdots & \omega_{ij} & \cdots & \omega_{iN} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N1} & \cdots & \omega_{Nj} & \cdots & \omega_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*\omega_{11} + \ldots + 1*\omega_{1j} + \ldots + 1*\omega_{1N} \\ \vdots \\ 1*\omega_{i1} + \ldots + 1*\omega_{ij} + \ldots + 1*\omega_{iN} \\ \vdots \\ 1*\omega_{N1} + \ldots + 1*\omega_{Nj} + \ldots + 1*\omega_{NN} \end{pmatrix}$ utifrån vilket vi ser att det som händer är att elementen på varje rad summeras så att vi får en ny Nx1 matris med summorna i.

Om vi sätter $D = \| C^{-1}V \|$ så får vi vår ekvation

$$w_R = \frac{C^{-1}V}{\| C^{-1}V \|} = \frac{\begin{pmatrix} \omega_{11} + \ldots + \omega_{1j} + \ldots + \omega_{1N} \\ \vdots \\ \omega_{i1} + \ldots * \omega_{ij} + \ldots + \omega_{iN} \\ \vdots \\ \omega_{N1} + \ldots + \omega_{Nj} + \ldots + \omega_{NN} \end{pmatrix}}{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_{11} + \ldots + \omega_{1j} + \ldots + \omega_{1N}}{M} \\ \vdots \\ \dfrac{\omega_{i1} + \ldots * \omega_{ij} + \ldots + \omega_{iN}}{M} \\ \vdots \\ \dfrac{\omega_{N1} + \ldots + \omega_{Nj} + \ldots + \omega_{NN}}{M} \end{pmatrix}.$$

Om det däremot är största möjliga tillväxt i aktieportföljen man vill ha vill man istället välja sin aktieportfölj så att ekvationen $\mu^T w - \frac{1}{2} w^T C w$, får ett så stort värde som möjligt då $V^T w = 1$.

med $\mu^T w$ som blir den förväntade avkastningen för vår aktieportfölj så innebär ekvationen då att det värde vi vill maximera är den förväntade avkastningen minus hälften av aktieportföljens varians.

Optimallösningen för denna ekvation lyder $w_T = \left(\mu - \frac{V^T C^{-1} \mu - 1}{V^T C^{-1} V} V \right)$. Det som händer här är först $V^T C^{-1} \mu$ vilket innebär att vi först summerar varje kolumn i C^{-1} och lagrar resultatet i en 1xN matris varefter vi tar denna nya matris och summerar alla elementen i den, med skillnaden att eftersom μ innehåller andra värden än 1 som sina element så kommer varje element $\left(V^T C^{-1} \right)_{ij}$ att viktas med μ_{ji} innan summeringen sker. Samma sak sker egentligen när vi har kolumnmatriser med ettor, men eftersom x*1 = x så är den matrisen ett specialfall som endast summerar utan att påverka värdena den summerar. Det vi har nu är en summa liggande i en 1x1 matris och innan vi gör något mer drar vi bort ett ifrån detta värde.

Det som ska göras härnäst är att vi vill dividera det värde vi precis har räknat ut med $V^T C^{-1} V$ vilket i stort sett är samma operation som ovan med skillnaden att μ är utbytt mot V vilket enligt det resonemang som fördes ovan innebär att vi helt enkelt summerar alla element i C^{-1} och få resultatet i en 1x1 matris. När vi sedan har utfört divisionen har vi fått ett nytt tal $E = \frac{V^T C^{-1} \mu - 1}{V^T C^{-1} V}$ så att det vi har kvar är $w_T = \left(\mu - EV \right)$ där det EV helt enkelt är att utifrån värdet på E skapa en ny Nx1 matris där varje element har värdet E. Och därefter så är det som $\mu - EV$ gör helt enkelt att den ifrån varje element i μ subtraherar värdet på E.