1 Optimala aktieportföljer

Vid beräkning av optimala aktieportföljer används matriser en hel del, därför beskrivs de viktigaste operationena som görs på matriser nedan

1.1 Multiplikation av matriser

Om A och B är matriser skrivs då multiplikationen av dessa som AB. Viktigt att notera är att operationen i större delen av fallen ej är kommutativ, det vill säga $AB \neq BA$. För att matrismultiplikationen ska vara definierad så om A är en $m \times n$ matris måste B vara en $n \times k$ matris. Den resulterande matrisen kommer då vara av storlek $m \times k$. Följande sammband gäller mellan varje element i den nya matris som bildas och elementen i matriserna A och B vid multiplikation av dessa: $(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}$

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1*2+2*5 & 1*2+2*6 & 1*3+2*7 & 1*4+2*8 \\ 3*1+4*5 & 3*2+4*6 & 3*3+4*7 & 3*4+4*8 \\ 5*1+6*5 & 5*2+6*6 & 5*3+6*7 & 5*4+6*8 \end{pmatrix}$$

1.2 Transponat

Om A är en matris betecknas A-transponat som A^T och operationen innebär att det som är rader i A blir kolumner och det som var kolumner blir rader. Följande samband gäller mellan A och A^T: $A^T_{ij} = A_{ji}$

Exempel:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.3 Identitetsmatrisen

Identitetsmatrisen är en speciell matris där diagonalen består av ettor och alla andra element är noll. Speciellt har identitetsmatrisen den egenskapen att $AI = IA = A$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 Inversmatris

Den inversa matrisen av A betecknas A^{-1} och är definierad så att $AA^{-1} = I$.

1.5 Norm

Om A är en matris av storleken $m \times n$ betecknas normen av den som $||A||$ och operationen är definierad som

$$||A|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

vilket innebär att kvadraterna av alla element i matrisen summeras och därefter tas kvadrateroten av denna summa.

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$||A|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2}$$

1.6 Definitioner

Här ett antal viktiga variabler som kommer att användas i uträkningarna senare.

$S_{it},\ t = 0, \ldots, T$ är aktiekursen för aktie i från dag 0 till dag T vilket vanligen sätts till den nuvarande dagen.

$r_{it} = \ln(S_{it}/S_{it-1}),\ t = 1, \ldots, T$ är avkastningen för aktien under samma tidsperiod som ovan, med skillnaden att den börjar på dag 1 eftersom för att kunna beräkna avkastningen behövs aktiens värde för två på varandra följande dagar. Avkastningen beräknas på en logaritmisk skala.

$\mu = \frac{1}{T\tau} \sum_{t=1}^{T} r_{it}$ är aktiens väntvärde, vilket i detta fall motsvarar den genomsnittliga logaritmiska avkastningen som aktien historisk sett haft per år. Värdet erhålls igenom att avkastningarna för hela tidsperioden summeras

varefter summan divideras med antalet dagar. Slutligen divideras det erhållna värdet med τ där $\tau = 1/250$, vilket motsvarar hur stor del av börsdagarna på ett år som en börsdag är.
Därefter införs att

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}$$

det vill säga att μ är en matris innehållande väntevärdena för alla aktier i aktieportföljen.

Vidare definieras σ_i vilket är aktiens standardavvikelse, oftast kallad voltaliteten som

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{(T-1)\tau} \sum_{t=1}^{T} (r_{it} - \mu_i \tau)^2}$$

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1j} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{i1} & \cdots & \sigma_{ij} & \cdots & \sigma_{iN} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{Nj} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$$

w_i är den andel av det som investerats i aktieportföljen som är investerat i aktie i samt så är w definierad till en matris innehållande w_i för samtliga aktier i portföljen.

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$$

Slutligen finns också matrisen $\mathbf{1}$ vilket är en kolumnvektor med endast ettor i

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Beräkningar

Utifrån en aktieportfölj finns det olika sätt att optimera denna på, de som kommer att tas upp här är minimal risk samt maximal tillväxt. Oberoende av vilken av dessa optimeringar som ska göras måste ekvationen $\mathbf{1}^T w = 1$ gälla där eftersom summan av de andelar som investerats måste vara ett.

1.7.1 Minimal risk

För att göra risken i aktieportföljen så lite som möjligt ska fördelningen mellan de ingående aktierna väljas på ett sådant sätt att deras kovarianser tar ut varandra och på så sätt ger en aktieportfölj vars totala varians är minimerad vilket därmed ger en risk som är så liten som möjligt. För att få fram den fördelning av investeringarna som åstadkommer den aktieportföljen är det problemet $\min w^T C w$ då $\mathbf{1}^T w = 1$ som behöver lösas. Optimallösningen på detta problem är

$$w_r = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{||C^{-1}\mathbf{1}||}$$

1.7.2 Maximal tillväxt

För att istället maximera aktieportföljens tillväxt är det

$$\max \mu^T w - \frac{1}{2} w^T C w \text{ då } \mathbf{1}^T w = 1$$

som behöver lösas. Ekvationen innebär att det värde som ska maximeras är halva aktieportföljens varians $w^T cw$ subtraherat ifrån den förväntade avkastningen $\mu^T w$. Optimallösningen för detta problem är som följer

$$w_T = \left(\mu - \frac{\mathbf{1}^T C^{-1}\mu - 1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}\mathbf{1}\right)$$

1.8 Effektiva fronten

Utifrån de optimala aktieportföljerna för minimal risk och maximal tillväxt går det att ta fram den så kallade effektiva fronten igenom att göra en linjär kombination av de två olika optimala portföljerna. De portföljer som ligger på den effektiva fronten är speciella på så sätt att de för varje möjligt värde på tillväxten har den minsta möjliga risken. För att beskriva de portföljer som ligger på den effektiva fronten används ekvationen

$$w_E = \lambda w_T + (1-\lambda)W_R, \lambda \in \Re$$

vilket innebär att för värden på λ nära ett blir den resulterande aktieportföljen w_E en aktieportfölj med låg risk medans för värden på λ nära noll blir det istället en aktieportfölj med stor tillväxt.

Jag är fortfaradne lite osäker på exakt vad det är som händer för $\lambda < 0$ eller $\lambda > 1$ Angående representation för den effektiva fronten tror jag det kan ha nått att göra med förållande mellan risk och avkastning.