Utifrån en aktieportfölj vill man veta hur man ska investera i de olika aktierna först för att minimera risken, det vill säga man vill ha en aktieportfölj vars värde ska vara så stabilt som möjligt. Sedan vill man också veta hur man ska investera för att få största möjliga tillväxt i sin aktieportfölj. Oberoende av vilken av sakerna vi vill göra så kan vi säga att summan av de andelar vi har investerat i de olika aktierna måste bli 1 och därmed måste för alla ekvationer vi löser sambandet $V^T w = 1$ gälla, där $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix}$, matrisen V innehåller i vårt fall alltid lika många rader som vi har aktier. Vidare så betyder V^T V-transponat vilket innebär att det som är kolumner i V blir rader i V^T och det som var rader i V blir kolumner i V^T och vi får då att $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. I matrisen w står varje w_j för den andel som vi har investerat i aktien j. Om vi tittar på operationen $V^T w$ så kommer den då att bli $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix}$ och enligt reglerna för matrismultiplikation får vi $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix} = \left(1 * w_1 + \ldots + 1 * w_j\right)$, vilket innebär att vi helt enkelt summerar alla elementen i matrisen w och får ut svaret i en 1x1 matris.

Nu kan vi gå vidare med att leta reda på våra optimala aktieportföljer, först vill vi då hitta hur vi gör för att minimera risken i vår aktieportfölj igenom att göra dess totala varians så liten som möjligt, det vi vill göra är alltså att hitta det minsta värdet som ekvationen $w^T C w$ antar då $V^T w = 1$ där $C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1j} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \cdots & \sigma_{ij} & \cdots & \sigma_{iN} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{Nj} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$ där σ_{ij} är kovariansen mellan aktie i och j samt N är antalet aktier i aktieportföljen. C brukar oftast kallas för kovariansmatrisen

Optimallösningen till denna ekvation är given som $w_R = \dfrac{C^{-1}V}{\| C^{-1}V \|}$. Om vi börjar med att analysera $C^{-1}V$ så är det som händer här att vi tar inversen av kovariansmatrisen C, (se bilaga för beräkning av invers), för att sedan igenom att multiplicera inversen med vår kolumnmatris V, för att illustrera detta tar vi och sätter $C^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1j} & \cdots & \omega_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_{i1} & \cdots & \omega_{ij} & \cdots & \omega_{iN} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N1} & \cdots & \omega_{Nj} & \cdots & \omega_{NN} \end{pmatrix}$ och vi får då

$$C^{-1}V = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1j} & \cdots & \omega_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_{i1} & \cdots & \omega_{ij} & \cdots & \omega_{iN} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N1} & \cdots & \omega_{Nj} & \cdots & \omega_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*\omega_{11}+\ldots+1*\omega_{1j}+\ldots+1*\omega_{1N} \\ \vdots \\ 1*\omega_{i1}+\ldots+1*\omega_{ij}+\ldots+1*\omega_{iN} \\ \vdots \\ 1*\omega_{N1}+\ldots+1*\omega_{Nj}+\ldots+1*\omega_{NN} \end{pmatrix}$$ utifrån

vilket vi ser att det som händer är att elementen på varje rad summeras så att vi får en ny 1xN matris med summorna i.

$\| C^{-1}V \|$ betyder sedan att vi tar normen av $C^{-1}V$, vilket görs igenom följande uträkning

$\| C^{-1}V \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ där n är antalet element i matrisen. Så om vi sätter $M = \| C^{-1}V \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ får vi

vår ekvation $$w_R = \frac{C^{-1}V}{\| C^{-1}V \|} = \frac{\begin{pmatrix} \omega_{11}+\ldots+\omega_{1j}+\ldots+\omega_{1N} \\ \vdots \\ \omega_{i1}+\ldots*\omega_{ij}+\ldots+\omega_{iN} \\ \vdots \\ \omega_{N1}+\ldots+\omega_{Nj}+\ldots+\omega_{NN} \end{pmatrix}}{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_{11}+\ldots+\omega_{1j}+\ldots+\omega_{1N}}{M} \\ \vdots \\ \dfrac{\omega_{i1}+\ldots*\omega_{ij}+\ldots+\omega_{iN}}{M} \\ \vdots \\ \dfrac{\omega_{N1}+\ldots+\omega_{Nj}+\ldots+\omega_{NN}}{M} \end{pmatrix}.$$

Hmm, betyder villkoret $V^T w = 1$ att jag kan behöva multiplicera med nån faktor $x>0$ här för att det sak bli rätt?